Άσκηση 3

Έστωσαν $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς τ/ω $f = g$ λ-σ.π , λ μέτρο Lebesgue

Νδο $f = g$.

Απάντηση

Το σύνολο $[f \neq g]$ είναι λ-μηδενικό (αφού $f = g$ λ-σπ).

$[f \neq g] = [f - g \neq 0] = (f-g)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ανοιχτό σύνολο

(διότι $f-g$ συνεχής και $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ανοιχτό).

Τότε αναγκαστικά το $A = (f-g)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \emptyset$

διότι αν υποθέσουμε ότι $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha, \beta) \subset A$

άρα $\lambda(A) \geq \lambda(\alpha, \beta) = \beta - \alpha > 0$ άτοπο

Άρα, $f = g$.

Άσκηση 4

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χ.μ και $f: X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη

ώστε $\int f d\mu < \infty$. Ν.δο

i) $\forall \alpha > 0 : \mu([f \geq a]) < \infty$.

ii) $\mu([f = +\infty]) = 0$.

Λύση

i) $\underset{\sim}{+\infty} > \int f \, d\mu \geq \int_{[f \geq a]} f \, d\mu \geq a \cdot \underbrace{\mu([f \geq a])} \Leftrightarrow \mu([f \geq a]) \leq \frac{\int f}{a}$ άνω φραγμένο

$\forall a > 0$.

ii) $\forall a \in (0,+\infty)$ $\quad [f=+\infty] \subset [f \geq a]$

Άρα, $\mu([f=+\infty]) \leq \mu([f\geq a]) \overset{(i)}{\leq} \frac{1}{a}\int f\,d\mu \xrightarrow{a\to\infty} 0$.

Άρα, $\mu([f=+\infty]) = 0$.

__Άσκηση__

Ν.δ.ο το 1ο λήμμα Borel-Cantelli με χρήση του Θεωρήματος Beppo-Levi.

__Απόδειξη__ $\quad (X, \mathcal{A}, \mu)$ χ.μ.

Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) < +\infty$

Θέτουμε $f = \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}$

Από το θεώρημα Beppo-Levi έπεται

$$\int f\,d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int \chi_{A_n}\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) < +\infty.$$

Άρα, από την προηγούμενη άσκηση: $\mu([f=+\infty]) = 0$

Αλλά, το σύνολο $[f=+\infty] = \limsup A_n$

(διότι η f απειρίζεται αν $x \in A_n$, για άπειρα n)

Επομένως, $\mu(\limsup A_n) = 0$. Και η απόδειξη είναι πλήρης.

Άσκηση 6

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χ.μ. και μια ακολουθία $f_n : X \to [0, +\infty)$ από μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \downarrow f$ τότε αν $\int f_1 d\mu < \infty$ $\int f_n \to \int f$. Η υπόθεση $\int f_1 d\mu < \infty$ μπορεί να παραληφθεί;

ΛΥΣΗ

Το $\lim f_n = f$ μετρήσιμη $\Rightarrow$ ορίζεται το $\int f d\mu$.

Επίσης $f_1 - f_n \geq 0$, μετρήσιμη και αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων $\forall n$

Τότε από Θ.Μ.Σ.

$$\int (f_1 - f_n) d\mu \longrightarrow \int (f_1 - f) d\mu \iff$$

$$\underset{\geq 0}{(f_1 - f_n)} + \underset{\geq 0}{f_n} = \underset{\geq 0}{f_1}$$

$\int f_1 < \infty$

$$\int (f_1 - f_n) = \int f_1 - \int f_n$$

όμοια

$$\int (f_1 - \lim f_n) = \int f_1 - \int \lim f_n$$

$$\cancel{\int f_1} - \int f_n \longrightarrow \cancel{\int f_1} - \int f \iff$$

$$\int f_n \longrightarrow \int f.$$

Η υπόθεση $\int f_1 d\mu < \infty$ δεν μπορεί να παραληφθεί

αντιπαραδείγματα

α) $f_n(x) = \frac{1}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ με χ.μ. $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$

$f_n \geq 0$, μετρήσιμες

$f_n \longrightarrow 0$ αλλά $\int f_n d\mu = +\infty$.

β) $f_n(x) = \chi_{[n, +\infty)}$ επίσης μας δίνει τα ίδια αποτελέσματα

Άσκηση 7 (Γενίκευση του λήμματος Fatou)

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χ.μ. και $h : X \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη με $\int h \, d\mu < +\infty$ & $f_n : X \to \mathbb{R}$ μετρησίμων συναρτήσεων με $f_n \geq -h$. Ν.δ.ο.

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Απόδειξη

$f_n + h \geq 0$ μετρήσιμες τότε από το λήμμα Fatou

$$\int \liminf_n (f_n + h) \, d\mu \leq \liminf_n \int (f_n + h) \, d\mu$$

$$\int (\liminf_n f_n) + h \, d\mu \leq \liminf_n \int (f_n + h) \, d\mu. \quad (1)$$

$$f_n^- = (-f_n) \vee 0 = \min\{0, -f_n\} \leq h.$$

$$\int f_n^- \, d\mu \leq \int h \, d\mu < +\infty.$$

Άρα, ορίζεται το $\int f_n \, d\mu$.

$$f_n + h = f_n^+ - f_n^- + h \Rightarrow (f_n + h) + f_n^- = f_n^+ + h \Rightarrow$$

$$\int (f_n + h) + f_n^- \, d\mu = \int (f_n^+ + h) \, d\mu$$

$$\int (f_n + h) = \int f_n^+ - \int f_n^- + \int h \, d\mu$$

$$\int (f_n + h) = \int f_n \, d\mu + \int h \, d\mu, \quad \forall n \quad (2)$$

ομοίως $\int (\liminf_n f_n) + h = \int \liminf_n f_n \, d\mu + \int h \, d\mu, \quad \forall n \quad (3)$

Άρα από τις ①, ② & ③ έπεται

$$\int \liminf f_n \, d\mu + \cancel{\int h \, d\mu} \leq \liminf \int f_n \, d\mu + \cancel{\int h \, d\mu}$$

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

~~Άσκηση~~ 6 (ΘΕΜΑ 2014)

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χ.μ., $N \in \mathbb{N}$ και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ εν $\mathcal{A}$ (δηλ. μετρήσιμα). Ορίζουμε E να είναι το σύνολο των σημείων του X που ανήκουν σε N τουλάχιστον από τα σύνολα $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

i) Ν.δ.ο. E είναι μετρήσιμο (δηλ. $E \in \mathcal{A}$)

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq N \cdot \mu(E)$

Υπόδ: Να χρησιμοποιηθεί η $f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$.

Λύση

i) Εφόσον $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \chi_{A_n}$ μετρήσιμη $\forall n \in \mathbb{N}$

άρα η $f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$ είναι μετρήσιμη

Έτσι, αφού $[f \geq N]$ έπεται $E \in \mathcal{A}$

ii) $\int f \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_{E^c} f \, d\mu$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \int \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \, d\mu \geq \int f \chi_E \, d\mu \geq \int N \cdot \chi_E \, d\mu = N \cdot \mu(E)$$

Άσκηση 9 (ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ)

Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χ.μ και $f_n: X\to[0,+\infty]$ μετρήσιμες ώστε $\int f_n d\mu<+\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Θέτουμε $g_n=\max\{f_i : 1\le i\le n\}$, $\forall n$ και υποθέτουμε ότι ισχύουν τα εξής:

α) $f_n \xrightarrow{\sigma\pi} 0$ και β) $\exists M>0 : \int g_n d\mu \le M$, $\forall n$

Νδο $\lim_n \int f_n = 0$. (Υποδ: Να χρησιμοποιηθούν τα θεωρήματα Μονοτ. σύγκλ. και κυριαρχ. σύγκλισης του Lebesgue)

<u>Λύση</u>

Καθε g_n είναι μετρήσιμη και $g_n : X\to[0,+\infty]$ καθώς $g_n\le g_{n+1}$, $\forall n$ άρα $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\uparrow$.

Άρα από ΘΜΣ αν $g:=\lim_n g_n$ έπεται

$\int g\, d\mu = \lim_n \int g_n\, d\mu \overset{(\beta)}{\le} M$. $\to$ g ολοκληρώσιμη

Εφόσον, $\forall n$: $\underbrace{f_n}_{=|f_n|} \le g_n \le g$ και $f_n \xrightarrow{\sigma\pi} 0$ (από (α))

τότε από το Θ.Κ.Σ. έπεται

$\lim_n \int f_n\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0$.

<u>Σχόλιο</u>: Εφόσον g μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$ τότε για να είμαστε πιο σωστοί

$F_n = f_n\cdot\chi_{X\setminus B}$ & $G = g_{X\setminus B}$ και να βάλω τα F_n, G στην λύση (αλλά δεν μας επηρεάζει αυτό διότι είναι ίσες μ-σπ τότε δεν επηρεάζει το ολοκλήρωμα)

Άσκηση 10

Έστω $\mathbb{Q}=\{q_1, q_2, \dots\}$ μια αρίθμηση των ρητών
Για κάθε $n\in\mathbb{N}$: $f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη και $f_n \geq 0$ με $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = 1$ και $f_n = 0$ εκτός του διαστήματος $A_n = [q_n - \frac{1}{2^n}, q_n + \frac{1}{2^n}]$.
(υπάρχει τέτοια συνάρτηση πχ $f_n = 2^{n-1} \cdot \chi_{A_n}$)
και ορίζουμε το μέτρο

$$\mu(A) = \int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\lambda \quad , \forall \text{ Borel σύνολο } A \subset \mathbb{R}$$

Νδο.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < +\infty$ λ-σπ

ii) Το μ είναι σ-πεπερ. μέτρο Borel $\mu \ll \lambda$ (απόλυτα συνεχές) με $\mu((\alpha,\beta)) = +\infty$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha<\beta$

Λύση

As είναι $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$

i)

$[f=+\infty] \subset \limsup A_n$

Έτσι, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < +\infty$.

Άρα, από το 1ο λήμμα των Borel-Cantelli

$\lambda(\limsup_n A_n) = 0 \Rightarrow \lambda([f=+\infty]) = 0 \Rightarrow f<+\infty$ λ-σπ.

ii) Από θεωρία το μ είναι μέτρο Borel με $\mu \ll \lambda$ (Πόρισμα ΘΜΣ). Θέτουμε $B_0 := \limsup A_n$.

Αφού, $\lambda(B_0)=0$ & $\mu << \lambda$ έπεται $\mu(B_0)=0$.

Χρησιμοποιώ έπειτα τα σύνολα $B_k = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, $\forall k \in \mathbb{N}$

για τα οποία ισχύει $\mathbb{R} = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$.

$\mu(B_0)=0$ και για $k \geq 1$: $\mu(B_k) = \int_{B_k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\lambda \overset{\text{Beppo Levi}}{=}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_k} f_n \, d\lambda \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=1}^{k-1} \int_{(B_k \cap A_n)} f_n \, d\lambda \leq (k-1)\cdot 1 = k-1.$$

διότι $B_k \cap A_n = \emptyset$, $\forall n \geq k$

Άρα, μ είναι σ-πεπερασμένο.

Μένει νδο $\mu((\alpha,\beta)) = +\infty$, $\forall \alpha,\beta$ εν $\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$

Σταθεροποιούμε α,β εν $\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$

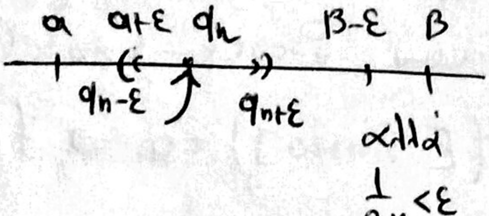
και θεωρώ τυχόν $\varepsilon>0$ ωστε $\alpha+\varepsilon < \beta-\varepsilon$ (υπάρχει)

και έστω $M = \{ n \in \mathbb{N} : \underbrace{q_n \in (\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)}_{\text{ισχύει για άπειρα } n} \text{ και } \underbrace{\frac{1}{2^n} < \varepsilon}_{\text{ισχύει τελικά για κάθε } n} \}$.

Η τομή αυτών είναι ένα σύνολο άπειρο

Άρα, Μ άπειρο

Επίσης, $A_n \subset (\alpha,\beta)$ $\forall n \in M$.



Έτσι, $\mu((\alpha,\beta)) = \int_{(\alpha,\beta)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(\alpha,\beta)} f_n \, d\lambda \geq \sum_{n\in M} \int_{(\alpha,\beta)} f_n \, d\lambda =$

$$= \sum_{n \in M} 1 = \infty. \Rightarrow \mu((\alpha,\beta)) = +\infty$$

Άσκηση 11

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χμ και $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$

Ν.δ.ο. $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\ \forall A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A)<\delta \Rightarrow \int_A |f| < \varepsilon$.

Λύση

Έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα

άρα $(\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists A_\delta \in \mathcal{A})$ με $\mu(A_\delta)<\delta$ & $\int_{A_\delta} |f| \geq \varepsilon$.

Δίχως βλάβη της γενικότητας θέτω $\delta := \frac{1}{2^n}$, $n=1,2,3\dots$

έχουμε ότι $(\exists A_n \in \mathcal{A})$ με $\mu(A)<\frac{1}{2^n}$ & $\int_{A_n} |f|\,d\mu \geq \frac{1}{2^n}$.

Αφού, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$.

Άρα, από το 1ο λήμμα Borel Cantelli

$\mu(\limsup_n A_n) = 0$.

Η συνολο-συνάρτηση $\nu(A) = \int_A |f|\,d\mu < +\infty$ (αφού $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$)

άρα $\nu(A)$ πεπερασμένο στον $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμο χώρο

καθώς επίσης $\nu \ll \mu$.

Επιπλέον, ισχύει $\nu(A_n) \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$0 = \nu(\limsup A_n) \geq \limsup \nu(A_n) \geq \varepsilon$ (↯)

διότι $\nu \ll \mu$ & $\mu(\limsup A_n)=0 \Rightarrow \nu(\limsup A_n)=0$

Οι Υποθέσεις στο ΘΜΣ & ΘΚΣ <u>ΔΕΝ</u> μπορούν να παραληφθούν.

Να υπολογίσετε τα

$\lim_n \int f_n \, d\lambda$ και $\int \lim f_n \, d\lambda$

αν ισχύει ότι:

α) $f_n = n \cdot \mathcal{X}_{(0, \frac{1}{n})}$

β) $f_n = \frac{1}{n} \cdot \mathcal{X}_{[n^2, +\infty)}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) $\lim f_n = 0$

$\int \lim f_n \, d\lambda = \int 0 \, d\lambda = 0.$

$\lim \int f_n \, d\lambda = \lim \left(n \cdot \left(\frac{1}{n} - 0 \right) \right) = 1.$

Δεν ισχύει το ΘΜΣ αφού (f_n) όχι αύξουσα.

Επίσης, και το ΘΚΣ δεν ισχύει εδώ διότι δεν υπάρχει $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρ. ώστε $|f_n| \leq g$

β) $\int f_n \, d\lambda \to \infty$

$\int \lim f_n \, d\lambda \longrightarrow 0$

ίδια πράγματα ... ..